秋草学園短期大学　紀要 34 号（2017年）

「数」の「学」問としての数学（4）
―求解の醍醐味―

星　野　　　治

Mathematics, the Learning of Number:
4. To show anyone how pleasant it is to solve mathematical problems.

Osamu Hoshino

１．はじめに

かつて、数学における新しい概念の導入は、「“キウイフルーツ”を知らない人にキウイフルーツを説明するようなもの」とたとえられた（中村、1979）。キウイフルーツは今や取り立てて珍しい食品ではなくなっているが、上記の比喩はなかなか秀逸であると思う。既存のものとは全く異なる基準や考えかたを提唱するために少なからぬ努力と勇気とを要するという事情は、今に至るまで何ら変わっていないし、今後も決して変わらないであろう。筆者が前稿［星野（2008、2012、2013）］で述べたように、数学の面白さ・興味深さを他者（特に数学嫌いな人）に紹介して納得させることもまた、数学の新概念導入に勝るとも劣らない難事である。

筆者からみた数学の面白みとは、“ハーブティー”のようなものである。ハーブティーは茶の一種であるが、その独特の風味のために好き嫌いが明瞭に分かれる。筆者自身にとってのハーブティーは、飲み始めた当初こそ単なる苦くて臭いだけの飲料に過ぎなかったが、最近では、あの苦味や芳香がむしろハーブティーの魅力であることを、少しずつ理解でき始めたように感じる。数学もまた同様で、自分自身が苦手としている問題を何らかのきっかけを経て解決できたときの喜びは、何物にも代えがたいものである。

本稿では、これまで筆者が出会ったいろいろな数学の問題の中から印象深いものを選び、順不同で紹介する。そして、“数学の謎解きの面白さ”の要因に関して、現時点での筆者の見解を述べる。今回紹介する問題の多くは、筆者自身の過去の記憶の中から引き出した問題や、個人のホームページ・数学の啓蒙書・大学受験予備校のテキストなどで何度も掲載された“人気者の問題”である。問題が人気者であることは、その問題の面白さが広く認知されていることを意味する。

なお、どんな問題にも通常、複数通りの解答方法があるが、我々一般人は必ずしもプロパーな数学者ではないことに鑑み、今回は各自が理解できる仕方で問題を解決できればそれで良しとしたい。また、やはり筆者が興味を寄せている問題の一つに「時計算」があるが、時計算については星野（2010）ですでに述べているため、本稿では触れない。

２．問題と解答例

本稿で紹介する問題は、次の【問題１】～【問題８】に示す計８問である。後述の**２－⑴.** 節～**２－⑻.** 節において、各問の解答例および解説を順次記す。

以後、底の表記を省略した対数はすべて、自然対数を意味する（$\log x = \log_e x$）。

【問題１】　古代ギリシャの数学者ディオファントスの墓石には、次のような意味の文章が刻まれていたという。

『ディオファントスは，一生の６分の１を少年として過ごし，その後，一生の 12 分の

1たってから髭を伸ばした。さらに，一生の7分の1たってから結婚し，その5年後に子供が生まれた。この子供は父の一生の半分だけ生き，父よりも4年早くこの世を去った。』
この文章によれば、ディオファントスは何歳で亡くなったことになるか。

【問題2】 次の議論の結論が、誤りであることを説明せよ。
『任意の数 n に対して、次の等式が成り立つ。

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

両辺から $2n+1$ を引くと

$$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$$

両辺から、さらに $n(2n+1)$ を引くと

$$(n+1)^2 - (2n+1) - n(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$$

となるので、左辺について部分的に因数分解すると

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$$

を得る。

今度は、両辺に $\dfrac{(2n+1)^2}{4}$ を加えると

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4} = n^2 - n(2n+1) + \frac{(2n+1)^2}{4}$$

両辺をよく見ると、いずれも完全平方展開式になっているので、因数分解すれば

$$\left\{(n+1) - \frac{2n+1}{2}\right\}^2 = \left(n - \frac{2n+1}{2}\right)^2$$

となる。そこで、両辺の平方根をとると

$$(n+1) - \frac{2n+1}{2} = n - \frac{2n+1}{2}$$

最後に、両辺に $\dfrac{2n+1}{2}$ を加えると、次の式を得る。

$$n+1=n$$

つまり、任意の数は、それ自身に１を加えた数に等しい。』

【問題３】　実数関数 $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ の最大値および最小値を求めよ。

【問題４】　次の定積分を計算せよ。

（ア）　$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}\mathrm{d}x=$

（イ）　$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=$

【問題５】　六面さいころを２回投げて２回とも１の目が出れば勝つ賭けと、硬貨を５回投げて５回とも硬貨の表面が出れば勝つ賭けとでは、どちらが有利か。ただし、六面さいころはどの目の出方にも偏りがなく、硬貨は表面または裏面のどちらか一方が偏りなく出るものとする。

【問題６】　黄金比を ϕ とするとき

$$\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

であることを示せ。

【問題７】　一辺の長さが L である正四面体の体積を求めよ。

【問題８】　次の方程式の解を求めよ。

$$\log_2\left\{\log_3\left(\log_4 x\right)\right\}=\log_4\left\{\log_3\left(\log_2 x\right)\right\}$$

以下、解答例の紹介および解説を順次行う。

２－(1).【問題１】に対する解答例および解説

【解答例】

題意より、ディオファントスの生涯を図に示すと、図１のようになる。よって、ディオファントスの寿命を x 歳とすると、次の方程式が成り立つ。

$$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4$$

これを解いて、$x=84$ を得る。すなわち、ディオファントスは 84 歳で亡くなった。 =

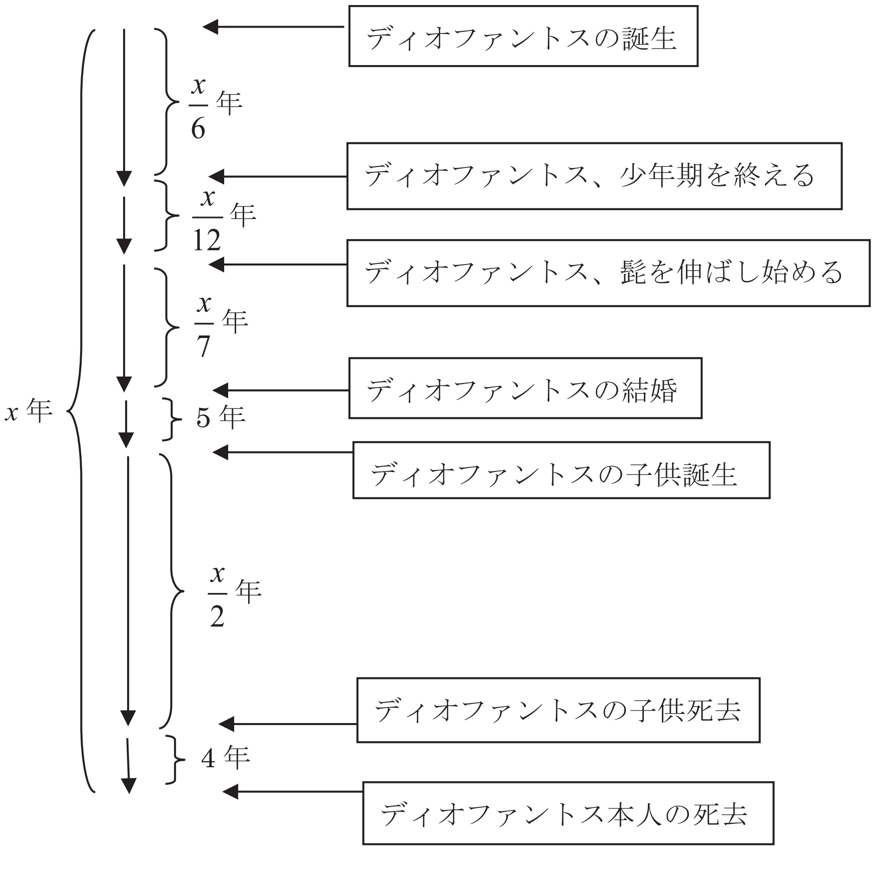

図１　数学者ディオファントスの生涯

【解説】

本問は、“ディオファントスの墓碑銘”と呼ばれる有名な問題である。

ここでは一次方程式による解答例を示した。他に、人の年齢が自然数であることに注目して、墓碑銘中に登場する分数の分母（ここでは登場順に 6、12、7、2）の最小公倍数から年齢を推定するという、方程式に頼らないマニアックな解答もあるようである（本稿では触れない）。

この種の文章題を楽に解くコツの一つは、問題の内容を適当な図として表現し直すことである。筆者自身、方程式の立式について見当が付いたのは、図 1 に示すような図を描いてからであった。図示の重要性は、後述の【問題７】の解答例についても当てはまる［本章２－⑺．節を参照］。いわゆる文系志向・理系志向を問わず、漫画やイラストの描画が得意であることは、数学の問題を解くうえで有利であると思う。

２－⑵．【問題２】に対する解答例および解説

【解答例】

題意では単に「数」とあるが、ここでは便宜上、実数に限定して考える。

題意の議論は、完全平方式を因数分解した式

$$\left\{(n+1)-\frac{2n+1}{2}\right\}^2=\left(n-\frac{2n+1}{2}\right)^2$$

までは正しい。

しかし、任意の実数 a に対して $\sqrt{a^2}=|a|$ は成立するが、$\sqrt{a^2}=a$ は $a\geq 0$ でなければ成立しない。したがって、

$$\sqrt{\left\{(n+1)-\frac{2n+1}{2}\right\}^2}=\sqrt{\left(n-\frac{2n+1}{2}\right)^2}\qquad\therefore\ \left|(n+1)-\frac{2n+1}{2}\right|=\left|n-\frac{2n+1}{2}\right|$$

でなければならない。

ここに、得られた左辺を変形すると

$$\left|(n+1)-\frac{2n+1}{2}\right|=\left|(n+1)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}\right|$$

同じく、右辺を変形すると

$$\left|n-\frac{2n+1}{2}\right|=\left|n-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|=\left|-\frac{1}{2}\right|$$

絶対値を考慮すれば、$\left|\frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right|$ は正しい。したがって、題意の議論の最後で行われる式変形の結果が

$$\left|(n+1) - \frac{2n+1}{2}\right| - \frac{2n+1}{2} = \left|n - \frac{2n+1}{2}\right| - \frac{2n+1}{2}$$

であれば、この式の等号は確かに成立する。

しかし、題意の議論のうち、開平後の式変形は、両辺の絶対値に対するものではない。そのため、開平後の議論は $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ を前提としない限り成立しない。当然、最終的に両辺へ $\frac{2n+1}{2}$ を加えて得られる等式 $n+1=n$ は、誤った結論である。∎

【解説】

筆者が数学に興味を抱いたきっかけの一つに、“パラドックス”がある（星野、2012)。本問は、Northrop（1944）に紹介されているパラドックスの一つである。本問に示した式変形がどこまで正しく、どこから不適切あるいは不正確になるかを見破ることがポイントである。この種のパラドックスは時代を超えて、繰り返し登場する［例えば、虚構新聞社（2008）など]。

本稿では触れないが、パラドックスには図形に関するものも多数ある。例えば、筆者自身は“定直線外の定点から定直線に向かって二本の垂線を引くことができることの証明”（Northrop、1944）を読んだ当初、大いに戸惑ったものである。なお、図形のパラドックスは全部が虚構というわけではなく、例えば「周囲の長さが無限大であって内部の面積が有限である閉曲線」（Koch 雪片など）のように、理論的には正しい図形もある（ただし、無限大という状態の長さを実際に測ることは不可能であるので、理論図形に対する完全無欠な模型を具体的に作り出すことはできない)。

数学の発展史を省みれば、「$1=0$ であることの証明」などに代表される数式のパラドックスは、無限大・無限小という考えかたに細心の注意を払う必要があることを認識する契機の一つとなった。同様に、図形のパラドックスは、現代数学における新しい概念（「フラクタル」や「カオス」など）を生み出すための突破口の一つとなった。

パラドックスはあくまでも数学ジョークを楽しむゲームの一種であるから、もっともらしく提示された“自称「結論」”に振り回されて一喜一憂するには及ばない。数学的ジョークに振り回されて憤慨立腹する前に、上述のパラドックスの意義を今一度考え直す必要がある。

２－(3)．【問題３】に対する解答例および解説

本問では、二種類の解答例を示した後、それらを一括して解説する。

【解答例Ａ】

$y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ の両辺を x で微分すると $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{x(x+2)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

x の変化に対して、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の符号および y の値は、表１のように変化する。また、曲線 $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ の概形をグラフで示すと、図２のようになる。表１および図２より、関数の極大値（極小値）は最大値（最小値）と一致することがわかる。

以上から、最大値は $[y]_{x=0}=1$、最小値は $[y]_{x=-2}=-\dfrac{1}{3}$ である。■

表１　関数 $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ の変化の概要

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$+\infty$
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	(-0)	$-$	0	$+$	0	$-$	(-0)
y	-0	↘	極小	↗	極大	↘	$+0$

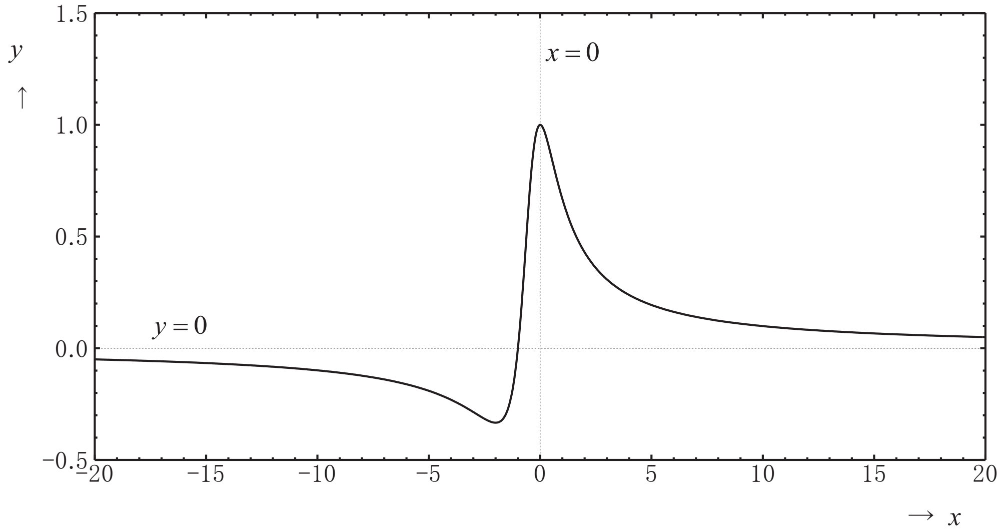

図２　関数 $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ の概形（y 方向の目盛りを拡大表示してある）

【解答例Ｂ】

x が実数であるとき $x^2+x+1>0$ であるから、x^2+x+1 を関数 $y=f(x)$ の両辺に乗じても、等号の意味は変わらない。これより、

$$y=\frac{x+1}{x^2+x+1} \quad \text{より}\quad y\left(x^2+x+1\right)=x+1\text{、よって}\quad yx^2+(y-1)x+(y-1)=0$$

と変形しておき、「x についての方程式 $yx^2+(y-1)x+(y-1)=0$ が実数解をもつための条件」を調べることによって、y の取り得る最大値および最小値を求めればよい。

ここで、y の値に応じた場合分けを行う。

まず、$y=0$ のとき $yx^2+(y-1)x+(y-1)=0 \quad \Rightarrow \quad -x-1=0 \qquad \therefore \quad x=-1$

を得る。つまり、$y=0$ のとき、この方程式を満たす実数解 $x=-1$ が存在する。

次に、$y\neq 0$ のとき、実数 x についての二次方程式 $yx^2+(y-1)x+(y-1)=0$ が実数解をもつための必要充分条件は、この方程式の判別式 $D=(y-1)^2-4y(y-1)$ が負にならないことである。つまり

$$(y-1)^2-4y(y-1)\geq 0\text{、よって}\quad -3y^2+2y+1\geq 0 \qquad \therefore \quad (3y+1)(y-1)\leq 0$$

最後の二次不等式から、y の取り得る値の範囲は $-\frac{1}{3}\leq y\leq 1$、ただし $y\neq 0$ である。

ここに、$y=0$ の場合でも x についての方程式 $yx^2+(y-1)x+(y-1)=0$ が実数解をもつことは、すでに示したとおりである。

以上から、関数 $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ の取り得る値の範囲は $-\frac{1}{3}\leq y\leq 1$ である。

つまり、求める関数の最大値および最小値はそれぞれ、1 および $-\frac{1}{3}$ である。∎

【解説】

筆者が本問に初めて出会ったのは今から三十年以上前、大学受験浪人中に通っていた某予備校の数学のテキストの中であった。この問題は、各自の知識のレベルに応じて、いろいろな解法が見つかるだろう。

いわゆる理工学系の大学や大学院を卒業・修了して大なり小なり“頭でっかち”になっている人であれば、まず両辺を微分して導関数を求め、次に関数の極大・極小の様子を調

べて、……となるだろう。そのような解答例が【解答例Ａ】である。関数の最大値、最小値はもとより、それらの値を与える x の値も同時に求めることができて、まさに一石二鳥である。

一方、“実数係数の方程式が実数解をもつための条件”を知っている人にとっては、むしろ微積分を用いない【解答例Ｂ】のほうが理解しやすいだろう。ただしこちらの解答では、式変形の後に得られる方程式に対して“二次方程式であるか否かの場合分け”を行う必要があるし、関数の最大値および最小値を与えるときの x を知りたければ $y=1$ あるいは $y=-\dfrac{1}{3}$ として方程式を再度解き直さなければならない。【解答例Ｂ】のポイントは、「関数の値域の上下限を求める問題」を「方程式が実数解をもつための条件を求める問題」に置き換えたことにある。正攻法の【解答例Ａ】と比較すれば、マニアックな解答であろう。

言うまでもなく、筆者自身が大学受験浪人中から大いに魅力を感じ、現在でもなお憎からず思っている解答は、【解答例Ｂ】のほうである。

２－(4).【問題４】に対する解答例および解説

【解答例】

（ア）　求める定積分を $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}\mathrm{d}x$ とおく。

積分変数を $x=-y$ と置換すると

$$I=\int_{1}^{-1}\frac{(-y)^2}{e^{-y}+1}\mathrm{d}(-y)=\int_{-1}^{1}\frac{y^2}{e^{-y}+1}\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^{-x}+1}\mathrm{d}x \qquad \therefore\ I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^{-x}+1}\mathrm{d}x$$

ここで、任意の実数 x に対して

$$\frac{x^2}{e^{-x}+1}+\frac{x^2}{e^x+1}=\frac{x^2e^x}{e^x+1}+\frac{x^2}{e^x+1}=\frac{x^2\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=x^2 \qquad \therefore\ \frac{x^2}{e^{-x}+1}+\frac{x^2}{e^x+1}=x^2$$

が成り立つから、

$$2I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^{-x}+1}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{e^{-x}+1}+\frac{x^2}{e^x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=2\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x$$

$$\therefore\ I=\int_{0}^{1}x^2\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

よって求める定積分は $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{e^x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$ である。〓

（イ）　求める定積分を $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\mathrm{d}x$ とおく。

まず、変数を $x=\frac{\pi}{2}-y$ と置換すると

$$J=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\log\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right\}\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)\mathrm{d}x$$

これより

$$2J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\log(\sin x)+\log(\cos x)\}\mathrm{d}x$$

対数の性質 $\log(\sin x)+\log(\cos x)=\log(\sin x\cos x)$ を利用すれば

$$2J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x\cos x)\mathrm{d}x\qquad\therefore\quad J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x\cos x)\mathrm{d}x$$

ここで、二倍角公式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ を利用すると

$$\log(\sin x\cos x)=\log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)=\log(\sin 2x)-\log 2$$

$$\therefore\quad J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\log(\sin 2x)-\log 2\}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin 2x)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log 2\mathrm{d}x$$

上式最右辺の第二項は

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log 2\mathrm{d}x=-\frac{\log 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=-\frac{\log 2}{2}[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi\log 2}{4}$$

であるから

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin 2x)\mathrm{d}x-\frac{\pi\log 2}{4}$$

ここで、$2x=z$ と変数置換すると、上式の第一項は

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log(\sin z)\mathrm{d}\left(\frac{z}{2}\right)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\log(\sin z)\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\log(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad J=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\log(\sin x)\mathrm{d}x-\frac{\pi\log 2}{4}$$

となる。しかるに

$$\int_0^{\pi}\log(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin x)\,\mathrm{d}x=J+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\log(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{J}{4}+\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

再度、変数置換 $x=w+\dfrac{\pi}{2}$ を行うと、$\sin\left(w+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos w$ であるから

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left\{\sin\left(w+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\mathrm{d}\left(w+\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos w)\mathrm{d}w=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)\,\mathrm{d}x$$

$$\therefore\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\log(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cos x)\,\mathrm{d}x=J$$

となり、結局

$$\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\log(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{J}{4}+\frac{1}{4}\cdot J=\frac{J}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\log(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{J}{2}$$

である。以上から

$$J=\frac{J}{2}-\frac{\pi\log 2}{4}\qquad\therefore\quad J=-\frac{\pi\log 2}{2}$$

すなわち、求める定積分は $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin x)\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi\log 2}{2}$ である。〓

【解説】

【問題４】は、奇妙な定積分の計算問題である。

一般に、関数 $f(x)$ に対する原関数 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ を具体的に求めることは困難であるが、定積分の値ならばうまく計算できることがある。今回示した問題は二問とも、その種の“不思議定積分問題”の好例である。

まず、（ア）の定積分について考える。

筆者が本問に初めて出会ったのは、前問【問題３】と同じく、大学受験浪人中に通っていた某予備校の数学のテキストの中であった。本問は元々、某私立大学の入学試験として出題された難問らしいが、詳細は不明である。他方、ミノ〜＋（2011）のコメント投稿欄によれば、本問は数年前（つまり 21 世紀に入ってから）に発行された市販の数学関係雑誌でも紹介されたことがあるという。また、最近のインターネット上の質疑応答ページに

も登場する［例えば、Yahoo Japan Cooperation（2014）など］。本問は、時代を超えて繰り返し取り上げられる“人気者の問題”の好例である。

さて、被積分関数 $g\left(x\right)=\dfrac{x^2}{e^x+1}$ を複素関数として見ると、この関数は $x=\left(2m-1\right)\pi i$ で特異点をもつから（m は整数)、適切な積分経路を設定して複素積分の問題に置き換えてもよいだろう。しかしここではもっと簡便に、まだ複素関数論を学んでいなくても理解できる解答例を紹介した。主に利用した計算テクニックは、積分計算の基本の一つである“置換積分”である。被積分関数の分子が偶関数であることも、計算が楽になる要因の一つであろう。参考までに、被積分関数 $y=g\left(x\right)$ の概形を実数関数のグラフで示すと、図３の①のようになる。

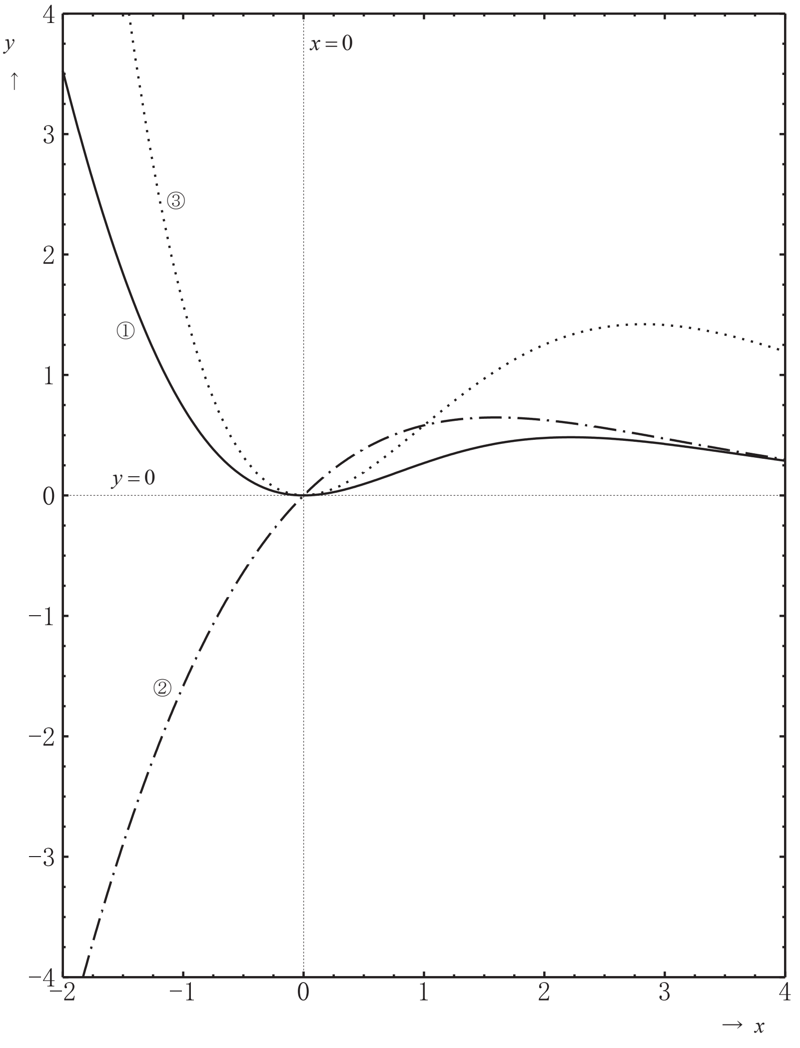

図３　関数の概形（①： $y=\dfrac{x^2}{e^x+1}$、②： $y=\dfrac{x^2}{e^x-1}$、③： $y=\dfrac{x^3}{e^x-1}$）

ただし、②および③では $\left[y\right]_{x=0}=0$ とする。

反面、被積分関数の分子が奇関数である場合や、被積分関数の分母が e^x+1 ではなく e^x-1 となっている場合の定積分（例えば、n を自然数とするときの $\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n-1}}{e^x\pm1}\mathrm{d}x$ など）は、前述のような手軽な計算では求められない。特に、被積分関数の分母が e^x-1 の場合、被積分関数は $x=0$ で発散することがある。グラフ①との比較のために、実数関数 $y=\frac{x^2}{e^x-1}$ のグラフの概形を図３の②に示す（ただし、$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^x-1}=0$ であるから、ここでは $[y]_{x=0}=0$ とする）。

積分区間の上端または下端が無限大である定積分（例えば、n を自然数とするとき $\int_{0}^{\infty}\frac{x^n}{e^x\pm1}\mathrm{d}x$ など）を計算する場合にもやはり、別の知見が必要になる。ちなみに、自然数 m に対する関数 $F_m(x)=\frac{x^m}{e^x-1}$ の定積分 $\int_0^\infty F_m(x)\mathrm{d}x$ は、応用数学の分野で扱われる特殊関数「Riemann-ζ（ゼータ）関数」や「Γ（ガンマ）関数」と密接な関係にあり（詳細は本稿では触れない）、たとえば $m=3$ のとき

$$\int_0^\infty F_3(x)\mathrm{d}x=\int_0^\infty\frac{x^3}{e^x-1}\mathrm{d}x=\frac{\pi^4}{15}$$

のように定積分の理論値をきちんと計算できる。実数関数 $y=F_3(x)$ のグラフの概形を図３の③に示す（ただし、②と同じく $[y]_{x=0}=0$ とする）。$x\geq0$ の範囲でのグラフの形状は①、②、③とも互いによく似ているにも関わらず、定積分計算の難易度が大きく異なることは興味深い。

次に、（イ）の定積分について考える。この定積分は、田島一郎（数学者／1912～1985）が自著の大学生向けテキスト（田島､1981）の中で“名人芸”と称した問題である。本問は、被積分関数に二種類の超越関数（自然対数関数および三角関数）を含み、しかも積分範囲の下端で被積分関数は発散するため［$\lim_{x\to+0}\log(\sin x)=-\infty$］、一見して(ア)よりも事情が複雑である。しかし、対数の性質や三角関数の性質を援用することによって、本問は(ア)と同じく置換積分の繰り返しだけで解けるから不思議である。

参考までに、実数関数 $y=\log(\sin x)$ のグラフの概形を図４に示す。この図からわかるとおり、このグラフは直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であるから、区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ での定積分と区間 $\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$ での定積分とは、互いに等しい値になる。このことは本問を解く際に大きな意味をもつ。つまり、図形の対称性のおかげで、置換積分により被積分関数や積分範囲がいろいろ変化するにも関わらず、定積分はいつも同じような値に落ち着くのである。

“不思議定積分問題”は、例を挙げれば切りがない。他にどのような計算例があるのか、興味のある各位にはぜひ調べられたい。

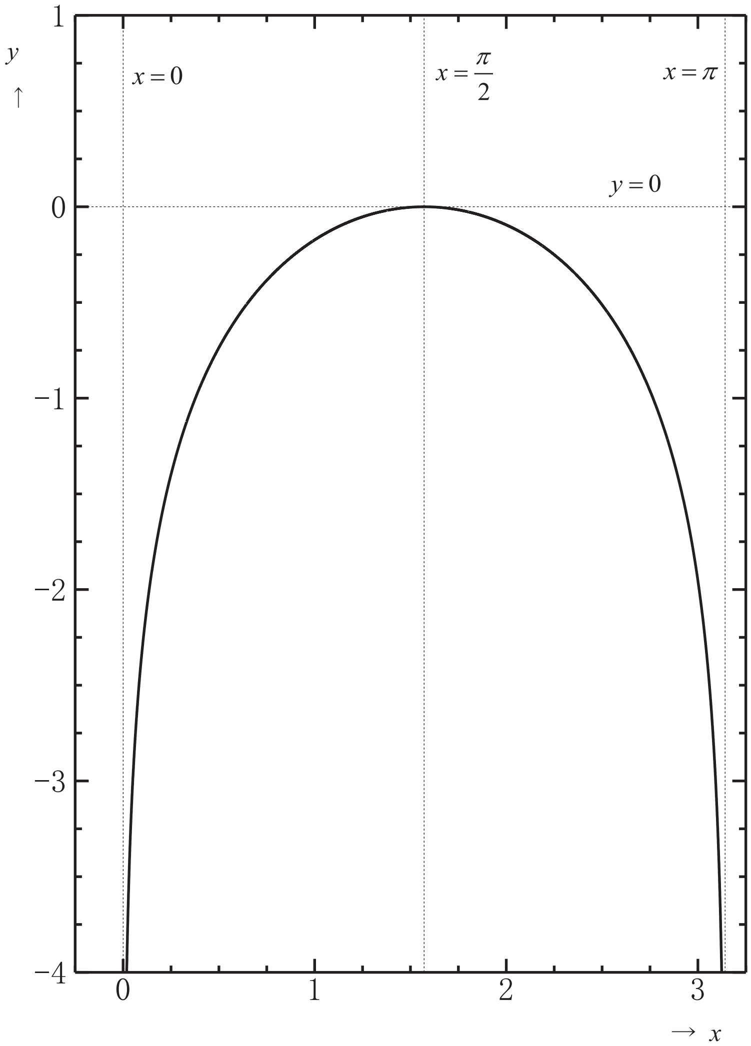

図４　関数 $y=\log(\sin x)$ の概形（$0\leq x\leq\pi$）

２－(5).【問題５】に対する解答例および解説

【解答例】

題意より、六面さいころを１回投げて１の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるから、六面さいころを２回投げて２回とも１の目が出る確率 p_d は、$p_d = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$ である。

また、題意より、硬貨を１回投げて硬貨の表面が出る確率は $\dfrac{1}{2}$ であるから、硬貨を５回投げて５回とも硬貨の表面が出る確率 p_c は、$p_c = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{32}$ である。

よって、明らかに $p_d < p_c$ であるから、「硬貨を５回投げて５回とも硬貨の表面が出れば勝つ賭け」のほうが有利である。〓

【解説】

趣向を変えて、今度は「確率」の問題を取り上げる。

本問は、確率論という学問の有用性を示す事例として、応用数学の参考書などで紹介されている［赤池（1958）、脇本（1970）］。筆者自身にとって確率はどちらかといえば苦手な分野の一つであるが、本問については初見以来すでに三十余年を経ているにも関わらず、何度眺めても飽きが来ない。一見するとトライアル回数の少ないさいころの賭けのほうに軍配を上げそうであるが、果たして本当にそれでよいのか。本問は、“見かけだけで実質を判断してはいけない”ことへの教訓の一つといえる。

著者は星野（2012）において、原理原則を単に暗記するだけでは不充分であって、学習者本人の実体験が大きくモノをいうことを述べた。本問の場合もいきなり解説をせず、実際に六面サイコロや硬貨を用意して、どちらの賭けが有利かを学習者に実感させると面白いであろう。

２－(6).【問題６】に対する解答例および解説

【解答例】

図５に示すように、長辺長 y、短辺長 x の長方形 R_L（ただし、$y > x > 0$ とする）から、辺長 x の正方形を切り取る。このとき、残った図形は長辺長 x、短辺長 $(y-x)$ の長方形 R_S である。

二つの長方形 R_L および R_S が互いに相似であるとき、それぞれの辺長の比（＝長辺長:短辺長）は等しいから

$$y : x = x : (y-x) \qquad \therefore \quad y(y-x) = x^2$$

二番目の式の両辺を $x^2(>0)$ で割ると $\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{y}{x}-1\right)=1 \qquad \therefore \quad \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 - \dfrac{y}{x} - 1 = 0$

$\phi = \dfrac{y}{x}$ とおくと、長方形の辺長比の定義により、ϕ は求める黄金比である。よって

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \qquad \therefore \quad \phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ここで、前提条件 $y > x > 0$ により $\phi > 1$ でなければならないから、複号のうち正符号の解が求める適解である。

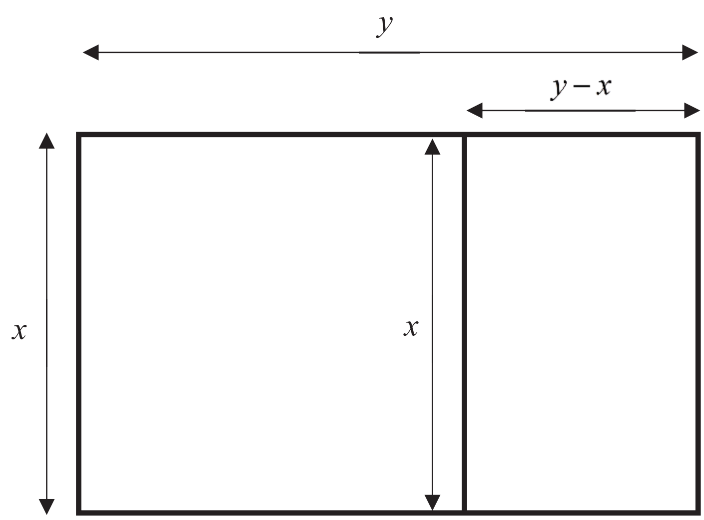

図５　黄金比 $\phi = \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y-x}$ をもつ長方形（ただし、$y > x > 0$ とする）

以上から、黄金比の理論値 $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ が得られる。黄金比は無理数であり、その具体的な値は $\phi=1.61803398874989\cdots$ である。

次に、ϕ についての二次方程式 $\phi^2-\phi-1=0$ を変形すると、$\phi>0$ であるから

$$\phi^2=1+\phi \qquad \therefore \quad \phi=\sqrt{1+\phi}$$

よって、左辺を右辺の平方根の中へ再帰的に代入すると

$$\phi=\sqrt{1+\phi}=\sqrt{1+\sqrt{1+\phi}}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\phi}}}=\cdots=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

が得られる。

また、ϕ についての二次方程式 $\phi^2-\phi-1=0$ の両辺を $\phi(>0)$ で割ると

$$\phi-1-\frac{1}{\phi}=0 \qquad \therefore \quad \phi=1+\frac{1}{\phi}$$

よって、左辺を右辺の分母へ再帰的に代入すると

$$\phi=1+\frac{1}{\phi}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\phi}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\phi}}}=\cdots=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

が得られる。〓

【解説】

黄金比とは、ある長方形から短辺を辺長とする正方形を切り取った残りの長方形が、元の長方形と相似であるときの、各長方形の長辺長と短辺長との比である。美術の分野において、あらゆる長方形の中でも黄金比の縦横比をもつ長方形は、最も美しく見えるとされている。

黄金比の定義は上記以外にもいろいろ知られているが、いずれも極めて直感的で理解しやすい。そのため、試験問題の題材としてもしばしば取り上げられる［例えば、秋草学園高等学校（2014）など］。

黄金比 ϕ の最後の式は、星野（2008）でも述べた“正則連分数展開式”である。黄金比の理論値 $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ が数字の「1」ばかりずらりと並ぶ“複平方根”や“連分数展開”の形で表現されることは、大変興味深い。いずれも、電卓（開平計算機能や逆算機能が付いていて、かつ表示桁数が多い製品を使うとよい）や表計算ソフトウェアを利用すれば、計算値が次第に黄金比の理論値へ収束していくことを容易に確認できる。

Disney（1959）や木村･小野寺（2010）は､アニメーションや CG､実写を多数用いながら､黄金比の性質や歴史、黄金比と自然界との関連などを丁寧に、面白くかつ分かりやすく解説している。

２−(7). 【問題７】に対する解答例および解説

【解答例】

図６より、正四面体は「立方体の隣り合わない四頂点を結んで得られる立体」である。言い換えれば、正四面体は「立方体の角から“隣合わない三頂点を含む四面体”を四個切り落とした立体」である。上記のことを利用すれば、次のように簡便に解答を得られる。

まず、正四面体の一辺長 L は立方体の各面の対角線の長さに等しいから、立方体の一辺長は $\dfrac{L}{\sqrt{2}}$ である。これより、立方体の体積は

$$\frac{L}{\sqrt{2}}\times\frac{L}{\sqrt{2}}\times\frac{L}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}L^3}{4}$$

である。

一方、立方体から切り落とされる四面体の一つを V とする。図６より、V の底面は斜辺長 L の二等辺直角三角形であり、V の高さは $\dfrac{L}{\sqrt{2}}$ である。これより、V の体積は

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{L}{\sqrt{2}}\times\frac{L}{\sqrt{2}}\right)\times\frac{L}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}L^3}{24}$$

である。

先述のとおり、立方体から V を計四個切り落とせば題意の正四面体が得られるので、求める正四面体の体積は

$$\frac{\sqrt{2}L^3}{4}-4\times\frac{\sqrt{2}L^3}{24}=\frac{\sqrt{2}L^3}{12}$$

である。〓

【解説】

正四面体の体積というと、多くの人は

$$(\text{四面体の体積})=\frac{1}{3}\times(\text{四面体の底面積})\times(\text{四面体の底面から頂点までの高さ})$$

という公式がすぐに頭に浮かんで、まず正四面体の底面積を求めておき、次に正四面体の高さ（つまり、正四面体の頂点から底面の正三角形に下した垂線の長さ）を求める……

という“正攻法”を手掛けようとして、解答を導くまでに思いのほか四苦八苦することであろう。係数に無理数をたくさん含む筆算計算では、ケアレスミスが発生しやすいものである。しかし、本問は図６のようなイメージを描くことができれば、ほとんど暗算だけであっけなく解くことが可能である。

藤原（1995）は、ＩＴ分野の技術者を新規採用する際、応募者の発想力の柔軟性を試すために、採用試験問題の一つとして本問を出題したエピソードを紹介している。

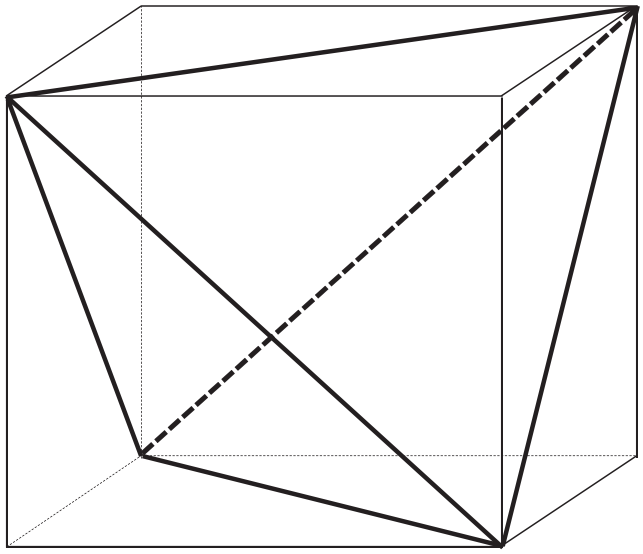

図６　立方体（細線）に内接する正四面体（太線）

２－(8). 【問題８】に対する解答例および解説

【解答例】

求解の簡便化のため、ここでは実数解を求める。

両辺の値が常に実数であるという前提で、題意の方程式を順次変形すると

$$\log_2\left\{\log_3\left(\frac{\log_2 x}{2}\right)\right\}=\frac{\log_2\{\log_3(\log_2 x)\}}{2}$$

$$2\log_2\{\log_3(\log_2 x)-\log_3 2\}=\log_2\{\log_3(\log_2 x)\}$$

$$\log_2\{\log_3(\log_2 x)-\log_3 2\}^2=\log_2\{\log_3(\log_2 x)\}$$

$$\{\log_3(\log_2 x)-\log_3 2\}^2=\log_3(\log_2 x)$$

$y=\log_3\left(\log_2 x\right)$ とおくと

$$\left(y-\log_3 2\right)^2=y$$
$$y^2-\left(2\log_3 2+1\right)y+\left(\log_3 2\right)^2=0$$

である。これは y に関する二次方程式であるから、これを解いて

$$y=\frac{2\log_3 2+1\pm\sqrt{\left(2\log_3 2+1\right)^2-4\times\left(\log_3 2\right)^2}}{2}$$
$$=\log_3 2+\frac{1}{2}\pm\sqrt{\log_3 2+\frac{1}{4}}$$

よって

$$\log_3\left(\log_2 x\right)=\log_3 2+\frac{1}{2}\pm\sqrt{\log_3 2+\frac{1}{4}}$$
$$\log_2 x=2\cdot 3^{\frac{1}{2}\pm\sqrt{\log_3 2+\frac{1}{4}}}$$

を得る（ここまで、複号同順とする）。

ここで、求める解 x が実数であるためには、題意の方程式の左辺が実数となるための条件から

$$\log_4 x=\frac{\log_2 x}{2}>1 \quad \text{すなわち} \quad \log_2 x>2$$

でなければならない。しかるに、$\log_3 2>0$ より $\frac{1}{2}-\sqrt{\log_3 2+\frac{1}{4}}<0$ は明らかであるから $3^{\frac{1}{2}-\sqrt{\log_3 2+\frac{1}{4}}}<1$ となる。つまり、複号のうち負符号の解は、条件 $\log_2 x>2$ を満たさない。よって、複号のうち正符号の解のみが有効である。

以上から、求める実数解は $x=2^{2\cdot 3^{\frac{1}{2}+\sqrt{\log_3 2+\frac{1}{4}}}}$ である。∎

【解説】

本題は、筆者の高等学校在学時代の所属サークルが不定期刊行していた、ガリ版刷りのミニコミ誌に掲載された問題の一つであり、同サークルの先輩（当時）から筆者へ向けて提示された“宿題”である（小野、1981）。出題当時、筆者自身の計算力不足等の影響もあって、すぐには解答を出せなかったと記憶している。

通常、方程式に対して単に「解を求めよ」とあれば、解を複素数の範囲にまで拡張して考察する。しかし、超越方程式に対する複素解の求解は一般に煩雑であるため、実数解に

限定して、最近ようやく解答を得た次第である。三十余年のブランクを経て提出される解答としては少々情けないが、その点はサークルの先輩（当時）にご容赦いただきたく思う。

最後に得られた解は非常に複雑な冪表現をなしているが、参考までに解および関数値を具体的に計算すると、次のようになる。

$$x = 2^{2\cdot 3^{\frac{1}{2}+\sqrt{\log_3 2+\frac{1}{4}}}} = 839.965329977\cdots$$

$$\log_2\left\{\log_3\left(\log_4 x\right)\right\} = \log_4\left\{\log_3\left(\log_2 x\right)\right\} = 0.524644029546\cdots$$

３．考察

数学の問題を面白くかつ楽しみながら解く際に大きな影響を及ぼす要因を探ってみると、その要因は大きく二つに絞られる。一つは“数学以外の知見からの影響”、もう一つは“問題の条件設定の見直し”である。

以下、順を追って一つずつ考察する。

３－(1)．数学以外の知見からの影響

本稿と同様の趣旨に基づき、数学に関する話題を幅広く取り扱っている最近の著作あるいはインターネットサイトとしては、例えばs_honma（2000）やマスオ（2014、2016）、黒猫の三角（2016）などが挙げられる。これらを拝読あるいは拝見していて、痛切に感じることが二つある。一つは、初等教育や中等教育の課程で取り扱われている知見は、実際には我々の想像以上に奥行きや深みがあるということである。そしてもう一つは、いわゆる学習指導要領に極端にこだわらなくてよいのであれば、もっと面白く（つまり解りやすく）教えることができる事項は山ほどあるということである。

我々の日常生活において、数学的知見と他の知見とが巧みに交流している例はたくさんある。例えば、特定の数え年に対する呼称として、15歳、30歳、40歳、50歳、60歳はそれぞれ「志学」「而立」「不惑」「知命」「耳順」と呼ばれ、周知のとおりいずれも中国の古書『論語』由来の呼称である。数え年の61歳（満年齢では60歳）は、後述の理由により「還暦」と呼ばれる。数え年の70歳はやはり『論語』由来で「従心」というが、それよりもむしろ杜甫（盛唐の詩人／712～770）の詩句に由来する「古稀」のほうが一般に広く知られている。その他、数え年の77歳、80歳、88歳、90歳、99歳はそれぞれ、「喜寿」「傘寿」「米寿」「卒寿」「白寿」と呼ばれる。これらの呼称は「喜」「傘」「米」「卒」「白」という文字の形（行書体、略字体あるいは旧字体）と、各々の数え年に対応する漢数字との対比という、図形的な視点から考え出された呼称である。数え年の異名は上記以外にもたくさんあるが［例えば、松本（2006、2012）などを参照］、いずれもクイズ的な観点か

らみて面白いものばかりである。

「還暦」との関連で、これまた古代より用いられてきた「干支」についても簡潔に言及する。ふりがなとして和語による呼称を使うと、「干」は「甲・乙・丙・丁・戊・己・庚・辛・壬・癸」の十種類、「支」は「子・丑・寅・卯・辰・巳・午・未・申・酉・戌・亥」の十二種類からなり、各一文字ずつを取り計二文字を組み合わせて用いる。

現在の我々の日常生活ではグレゴリオ暦（の新暦）が活用されているが、それでも「土用の丑の日に鰻飯を食べる」、「安産祈願をした妊婦が戌の日に腹帯を巻く」等々のように、各日毎の干支を意識する習慣は残っている。日めくり式カレンダーには今なお、グレゴリオ暦に加えて各日毎の干支が併記される場合が多い。「私は乙巳の年（昭和 40 年 = 1965 年）に生まれました」、「今年の干支は丁酉（平成 29 年 = 2017 年）です」等々のように、各年毎の干支の表現は現在でも盛んに利用される。

その他、干支に因む固有名詞や迷信もたくさんある。関西地方の野球場『阪神甲子園球場』の名称は、甲子の年（大正 13 年 = 1914 年）に建造されたことに由来する。迷信の中でも特に「丙午」に関する迷信は、我々現代日本人に今もなお少なからぬ影響を及ぼしている。現時点以前における直近の丙午の年は昭和 41 年 =1966 年であるが、この年に誕生した日本人男女の人口は、前後の年と比較して極端に少ない。次の丙午の年（2026 年）にはどうなるのか、今から興味がある。

かつて、狭い意味での干支（つまり十二支）は、暦だけでなく時刻の呼称や方位・方角を示す場合にも用いられた。時刻については、「午の刻」、「丑三つ」等々という呼称が実際に用いられた時代があったし、現在でも「正午」という呼びかたが残っている。方位・方角については、真北を子の方向として円を十二等分し、時計回りの順で方位の呼称に十二支を当てはめた。つまり真東、真南、真西はそれぞれ、卯の方向、午の方向、酉の方向になる。これより、地球の南北方向を結ぶ経線を「子午線」（これは現在でも使われている言葉である）、経線と直交する東西方向の線を「卯酉線」と称した。さらには、「艮（= 丑寅、つまり北東）」の方向を“鬼門”と見なして忌避する慣習が、実際に存在した。

話を戻して、満年齢で 60 歳（数え年では 61 歳）を「還暦」と呼ぶことも、やはり干支に由来する。既述のように「干」は十種類、「支」は十二種類あって、10 と 12 との最小公倍数は 60 であるから、各年に対応する干支の組み合わせは 60 年周期で繰り返される。したがって、各自の誕生年と同じ干支の年を再び迎えることができた人の年齢は、満年齢で 60 歳（数え年では 61 歳）ということになる。同様に、満 120 歳については“二度目の還暦”という意味で「大還暦」と呼ぶらしい。

以上、年齢の異名や干支について長々と言及したが、これらはいずれも古来より伝承されてきた知見のほんの一例である。我々の先人は日常生活のいろいろな場面において、その一つ一つに数や数学を絡めて親しんできた。それらの名残が、上記のような言葉や慣習として、今日まで伝わってきたのである。現在の家庭や学校において、上述の知見はどのような仕方で、かつどの程度まで子どもたちに教えられているのだろうか。これらの話題

は、いわゆる五教科（外国語、数学、国語、理科、社会）のうち「数学」だけでなく「国語」や「理科」や「社会」にも充分当てはまる知見である。先述の簡単な説明からだけでも充分に明らかなとおり、この種の知見を学習するには、教科間を自由に交流できる立ち位置が不可欠である。

ところが、実際の教育内容のうち学習指導要領の影響を強く受けている領域では、上述のような異教科間の知見の援用が認められない場合も珍しくない。学習指導要領は、教える側にとって非常に頼りとなる反面、他教科の学習内容同士の交流については必ずしも考慮されない側面を有する。特に理数系教科（算数・数学・理科）の場合、学習指導要領が全面に立ちはだかっている影響を受けて、せっかくの求解の面白さが損なわれている感を否めない。以下ではその一例として､高等学校の物理の授業にも登場する“自由落下運動”を取り上げる。

高等学校の物理で取り扱われる剛体運動論は、空気抵抗を無視して考察される場合がほとんどである。では、空気抵抗を無視できない場合にはどうなるか。『重力加速度が鉛直下方に向かって一定である場合、初期速度０で自由落下する物体は落下速度がどんどん大きくなるが、落下速度に比例した空気抵抗を無視できない場合の落下速度は、ある値（これを「終端速度」という）よりも大きい速度にはならない』。多くの高等学校用の物理の教科書は、以上のような現象の説明を、文章だけで済ませている。当然ながら、“加速度が時間の経過とともに漸次小さくなる理由”や“終端速度の意味”を曖昧な記述に押し込めたまま終わっていることに対して、納得のいかない学習者が現れても不思議ではない。

上記の現象について、多少なりとも数学の知見を援用した説明を試みると、例えば次のようになる。物体の質量を m、加速度を a、速度を v、重力加速度を g とすると、上記の現象に係る運動方程式は

$$ma = mg - kv$$

と書ける（k は空気抵抗に関する定数で、物体の質量や速度に依らないとする）。初期条件は､時刻 $t = 0$ のとき $v = 0$ である。終端速度は､この運動方程式の左辺を０とする（具体的には $a \to 0$ とする）ことで得られる……という程度の内容までは、大抵の高等学校の物理の教科書に書かれている。

ここで、物体の加速度は $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ と定義されるから、先述の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv$$

と書ける。この方程式は､関数 $v = v(t)$ に係る一階線形微分方程式である。初期条件（時刻 $t = 0$ のとき $v = 0$）を適用してこの微分方程式を解くと

$$v=\frac{mg}{k}\cdot\left(1-e^{\frac{-kt}{m}}\right)$$

という指数関数を得る。図７に示した関数 $y=1-e^{-x}$ のグラフの概形からわかるとおり、この指数関数は、定義域の変数の増加とともに単調増加して、一定値（図７の場合は $\lim_{x\to\infty}y=1$）へ漸次近づく。かくして、上記で得られた v の式に基づき、空気抵抗がある場合の自由落下運動を解釈すると、次のようになる。『時刻 $t=0$ で自由落下を始めた物体は、速度 $v=0$ で落下を始め、徐々に速度を増していくが、その速度変化は指数関数的に漸次小さくなる。充分に時間が経過したとき（つまり $t\to\infty$ のとき）の落下速度は

$$\lim_{t\to\infty}v=\frac{mg}{k}$$

に落ち着く』。

　このように、微分（あるいは微分方程式）の知見を援用すれば、「落下速度は一定値（終端速度）に漸次落ち着く」ことの意味や「終端速度は物体の質量に依存して変わる」という終端速度の解釈等々、言葉だけによる表現と比較して、現象の説明は奥行きの深いすっきりとしたものになるのだが、遺憾ながら、現在の高等学校の数学において微分方程式はほとんど取り扱われていないようである（文部科学省、2009）。

　とまれ、数学的求解の面白さを追求するための鍵の一つは、数学以外の知見を幅広く援用することである。たかが遊び、たかがジョークといえども、決して侮ることはできない。むしろ、遊びやジョークを通して、少しでも数学への親しみをもってもらえれば、充分に

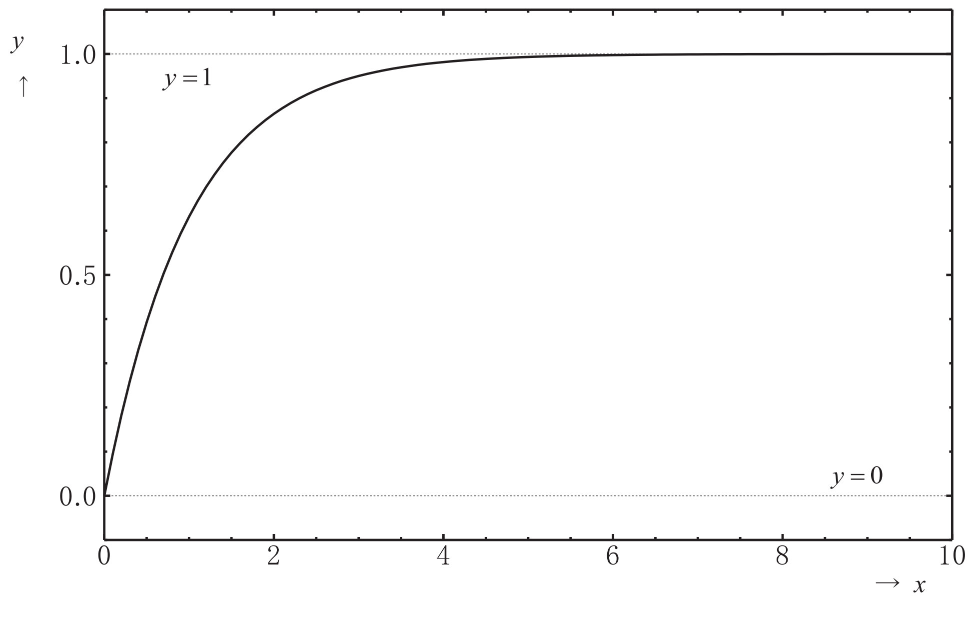

図７　関数 $y=1-e^{-x}$ の概形（y 方向の目盛りを拡大表示してある）

御の字ではないだろうか。トランプカードを使った各種ゲームや、本稿では扱わなかった「虫食い算」などは、いずれも数的推理能力を活性化する教材として大いに活用できる。

３－(2)．問題の条件設定の見直し

問題の求解条件を見直すことは、言い換えれば別の視点から問題を見直すことである。その結果、不可能と思われたことが実は可能であったり、あるいはその逆が起こったり、はたまた出題者や解答者が気付かなかった別の知見（の糸口）が発見できたりする。このこともまた、数学的求解の面白さの一面といってよい。

例えば、前章２．の【問題３】では、異なる観点に基づく二通りの解答例を示した。同問題の【解答例Ａ】では「関数 $y=f\left(x\right)$ を満たす実数のペア $\left(x,\ \ y\right)$ が描くグラフの存在範囲」に注目した。しかし、数値的にグラフを描画するだけでは理論的な解答を得られないため、分数関数の微分計算が必要になった。高等学校の数学でいえば、「数学Ⅲ」相当以上の難易度である。一方、【解答例Ｂ】では「方程式 $f\left(x\right)-y=0$ を満たす実数 x が存在するための条件」に注目したが、その際に使った道具は、二次方程式の実数解に関する知識であった。難易度的には高々、高等学校の「数学Ⅰ」程度である。つまり、問題に対する見方を変えるだけで、問題の難易度は大きく異なってくる。このことは、前章２．の【問題７】についても当てはまる。

前提条件の一部緩和あるいは見直しを行うことによって、問題の簡便化や概念の拡張が容易になった例は、他にもたくさんある。

その代表格は、$i=\sqrt{-1}$ を単位として表現される「虚数」、あるいは実数と虚数との一次結合の形で表現される「複素数」である。虚数は、“平方数は非負である”という（実数での）前提条件を緩和したことで意味を持つ、拡張された数の一種である。虚数や複素数の難点を敢えて記せば、“大小関係を直接定義できないこと”くらいである。虚数や複素数が数学はもとより、数学以外の分野（特に物理学）において果たす役割の大きさは計り知れない。

線形数学分野の「ベクトル」や「行列」、「Hamilton の四元数（中村、1979）」などでは、一般に“積の交換法則”が成立しない（ただし「ベクトルの内積」を除く）。しかし、“積の分配法則”や“積の結合法則”、“和の交換法則”は常に成立する。行列 A および B について積の交換法則 $A\times B=B\times A$ が成立する場合、「行列 A および B は交換可能である」と称して特別な取り扱いをする。

また、行列の積では条件次第で「$A\neq O$ かつ $B\neq O$ であって、かつ $A\times B=O$」という、実数ではあり得ない面白い結果が生じる（O は全成分が０である行列で、「零行列」と呼ばれる）。このことは、連立一次方程式の解の存否を論じる際等々に重要とな

る。“零でないもの同士の積が零になる”演算は、ベクトルにも存在する。「ベクトルの内積」において「$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ であって、かつ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$」（$\vec{0}$ は全成分が 0 のベクトルで、「零ベクトル」と呼ばれる）が成立する場合、「ベクトル $\vec{a}$ および $\vec{b}$ は互いに直交する」と解釈される。また、「ベクトルの外積」において「$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ であって、かつ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$」が成立する場合、「ベクトル $\vec{a}$ および $\vec{b}$ は互いに平行である」と解釈される。いずれも、ベクトルを図示して考えると理解しやすい。

歴史的に著名な数学問題について言及すると、19 世紀までに否定的に解決された『ギリシャの三大難問』（コンパスと直線定木とだけを用いて、「与えられた任意の立方体の二倍の体積をもつ立方体の作図」、「与えられた任意の角度の三等分化」および「与えられた任意の円と等しい面積をもつ正方形の作図」を行うこと）は、コンパスや直線定木“以外”の道具の活用が許されれば、いずれも肯定的に解決できる［例えば、藤田（1974）などを参照］。また、『Fermat の最終定理』や『Poincaré 予想』はいずれも、条件の見直しや着眼点の変更等々、多数の数学者たちの巧みなアプローチを経て、肯定的に解決された問題である。

総じて、問題の条件設定の見直しは、問題の求解の難易度や面白さに大きな影響を与えるのである。

４．おわりに

本稿では、筆者が以前から興味を持っていた数学問題のごく一部とその解答例とを、順不同で紹介した。また、数学上の求解の面白さに影響する二つの要因について言及した。

数学の問題を解くことは、読書や映画鑑賞と似ている。つまり、良い本や良い映画を何度読み返したり見直したりしても飽きが来ないのと同じく、数学の良い問題は何度解いても飽きない。“人気者の問題”は、まさにそのような良問に当たる。したがって、本稿で扱った数学の諸問題を最初に発案し提唱した人たちは、本当に偉大であると思う。各問の発案者・提唱者各位に対して、ここに改めて深謝を捧げたい。

数学という“ハーブティー”が単なる黴臭い液体のままで終わるか、それとも独特の味わいをもつ美味しい飲料となり得るかは、我々各自の今後の“味わいかた”次第といっても過言ではない。数学上の知見全般がもっと大勢の各位に親しまれるようになってほしいと願うのは、筆者だけではなかろう。

前章**２**．の**２－(6)**．節および**２－(8)**．節における数値計算は、Microsoft Windows 付属アプリケーションの“電卓”、および Microsoft Office 系ソフトウェアの“Excel”を用いて行った。

文献

Disney, W.（1959）：
Donald in Mathmagic Land.
Walt Disney Productions (California, U.S.A.).
Northrop, E.P.（1944）：
Riddles in Mathematics, a Book of Paradoxes.
Van Nostrand Reinhold Company (New York, U.S.A.), pp.262. s_honma（2000）：私的数学塾.
http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/（2017 年 10 月 27 日閲覧）
Yahoo Japan Cooperation（2014）：Yahoo! Japan 知恵袋.
https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q11139923166
（2017 年 10 月 27 日閲覧）
赤池弘次（1959）：　モンテカルロ法 ―確率・統計・乱数―．科学基礎論研究、第 4 巻第 2 号、pp.77-82.
秋草学園高等学校（2012）：数学試験問題．2012（平成 24）年度秋草学園高等学校第 1 回入学試験.
小野瑞城（1981）：編集後記.
アレフ･零、1981（昭和 56）年 3 月 20 日号、東京都立新宿高等学校数学研究部、p.20.
木村俊一・小野寺佑紀（2010）：自然界にひそむ無理数「黄金数 ϕ」 数に宿る“美しさ”と不思議にせまる．Newton、第 30 巻第 6 号、pp.76-91.
虚構新聞社（2008）：「2 は 1 に等しい」数学界で論議.
http://kyoko-np.net/2008090501.html（2017 年 10 月 27 日閲覧）
黒猫の三角（2016）：数学の力.
http://mathmatik.jp/（2017 年 10 月 27 日閲覧）
田島一郎（1981）：解析入門．岩波全書、325、岩波書店（東京都）、pp.293.
中村義作（1979）：常識を超えた数の世界．海鳴社（東京都）、pp.183.
藤田董（1974）：長さを測る.
生活のなかの数学シリーズ、3、日科技連出版社（東京都）、pp.188.
藤原博文（1995）：㊐の業界のオキテ‼．技術評論社（東京都）、pp.217.
星野　治（2008）：「数」の「学」問としての数学．秋草学園短期大学紀要、第 25 巻、pp.99-112.
星野　治（2010）：時計算に関する一考察．秋草学園短期大学紀要、第 27 巻、pp.121-132.
星野　治（2012）：「数」の「学」問としての数学 (2) ―数の「規則性」をどのように教えるか―．秋草学園短期大学紀要、第 29 巻、pp.163-173.
星野　治（2013）：「数」の「学」問としての数学 (3) ―数“楽”演習の実例紹介―.
秋草学園短期大学紀要、第 30 巻、pp.17-34.

マスオ（2014）：高校数学の美しい物語～定期試験から数学オリンピックまで 800 記事～.
http://mathtrain.jp/（2017 年 10 月 27 日閲覧）
マスオ（2016）：高校数学の美しい物語．SB クリエイティブ（東京都）、pp.256.
松本隆行（2006）：斑鳩町立斑鳩東小学校「寿」模擬授業指導案.
http://www1.kcn.ne.jp/~zubat/kingyo/060106kotobuki/kotobuki100monsidouan.htm
（2017 年 10 月 27 日閲覧）
松本隆行（2012）：漢字一字の授業「寿」．TOSS ランド、No.5349083.
http://www.tos-land.net/teaching_plan/contents/3908（2017 年 10 月 27 日閲覧）
ミノ～＋（2011）：大学入試問題を考える.
http://mino-mathematics.blog.so-net.ne.jp/2011-02-08（2017 年 10 月 27 日閲覧）
文部科学省(2009)：高等学校学習指導要領（文部科学省告示第 34 号／平成 21 年 3 月 9 日）.
脇本和昌（1970）：乱数の知識.
初等情報処理講座（監修：林知己夫）、5、森北出版（東京都）、pp.146.